II тарау. СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

§ 1. Квадрат матрица ұғымы. Анықтауыштар және оларды есептеу

Анықтама 1.1. n жолдан және n бағаннан тұратын кез келген a_{ij} , $i=\overline{1,n}$ $j=\overline{1,n}$ сандардан құралған квадрат кесте n-ретті квадрат матрица деп аталады.

Ол дөңгелек жақшамен немесе қосарланған тік сызықтармен белгіленеді:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}=\|a_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \qquad (2.1)$$

Мұндағы $i=1, 2, \dots, n$ – жол нөмірі, $j=1, 2, \dots, n$ – баған нөмірі, a_{ij} – i жол мен j бағанның қиылысындағы элемент деп аталады.

Сызықтық теңдеулер жүйесін шешумен тығыз байланысты – квадрат матрицаны сипаттаушы анықтауыш ұғымы.

A матрицаның анықтауышы $|A|$, $\det A$ немесе Δ арқылы белгіленеді.

Бірінші ретті $A=(a_{11})$ матрицаның анықтауышы немесе 1-ретті анықтауыш деп a_{11} санды атайды: $\det A=\Delta=|A|=a_{11}$. Мысалы $A=(-5)$ болса, $\Delta=|A|=-5$ болады.

2-ретті $A=(a_{ij})$ матрицасының анықтауышы немесе 2-ретті анықтауыш деп

$$\det A=\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21} \qquad (2.2)$$

санды атайды.

Мысалы, $A=\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$ болса, онда $\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 5-3\cdot 4==-2.$

3-ретті $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,3}\\ j=\overline{1,3}}}$ матрицасының анықтауышы немесе 3-ретті анықтауыш деп

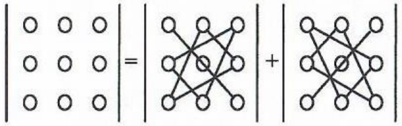
$$\det A=\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (2.3)$$

санды атайды.

(2.3) теңдік үшбұрыштар ережесі (Саррюс ережесі) деп аталадыда схемалық түрде былайша көрінеді:

«+» «−»



Анықтама 1.2. n-ретті (2.1) A матрицасының анықтауышы немесе n-ретті анықтауыш деп

$$\det A = \Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\omega(n)} (\pm a_{1\omega_1} a_{2\omega_2} .. a_{n\omega_n}) \qquad (2.4)$$

санды атайды, мұндағы қосынды барлық a_{ij} элементтерден, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, n-ретті алмастырулар бойынша алынған.

Көрсетілген қосынды $n!$ қосылғыштан тұрып, әрбір қосылғыш әрбір жолмен әрбір бағаннан алынған n элементтің көбейтіндісі. Қосылғыштардың жартысы "+", екінші жартысы "−" таңбамен алынады.

Бұл анықтама бойынша жоғарғы ретті ($n > 3$) анықтауыштарды есептеу күрделі. Дегенмен жоғарғы ретті анықтауыштарды төменгі ретті анықтауыштарға келтіретін ыңғайлы әдістер бар.

Анықтауыштардың қасиеттері

Кез келген ретті анықтауыштарға тән негізгі қасиеттерді қарастырайық. Ыңғайлы болу үшін бұл қасиеттердің алғашқыларын 3-ретті анықтауыштар үшін келтіреміз.

1°. Δ анықтауыштың жолдарымен сәйкес бағандарының орнын алмастырғанда, Δ -ның мәні өзгермейді, яғни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Дәлелдеу үшін екі анықтауышты да (2.3) ереже бойынша ашып шықсақ мүшелерінің тең екендігіне көз жеткіземіз.

2°.Δ анықтауыштың кез келген екі жолының (екі бағанының) орнын алмастырғанда, Δ -ның таңбасы өзгереді.

Дәлелдеуі (2.3) ережеден шығады.

3°. Δ анықтауыштың екі жолының (екі бағанының) сәйкес элементтері өзара тең болса, онда Δ -ның мәні нөлге тең.

Дәлелдеуі. Шынында да бірдей жолдарды (бірдей бағандарды) алмастырғанда анықтауыштың мәні Δ өзгермейді. Ал 2° қасиет бойынша жолдарды

алмастырғанда таңбасы өзгереді, яғни $\Delta = -\Delta$ болады. Бұдан $2\Delta = 0$, яғни $\Delta = 0$.

4°. Δ анықтауыштың кез келген жолының (бағанының) барлық элементтерін λ санына көбейтсек, онда Δ -нің мәні осы санға көбейтіледі, яғни

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Дәлелдеуі. (2.3) ереже бойынша екі анықтауышты қосылғыштар түрінде жазсақ, қосылғыштардың өзара теңдігі шығады.

5°. Δ анықтауыштың кейбір жолының (бағанының) барлық элементтері нөлге тең болса, онда Δ -ның мәні де нөлге тең.

Бұл қасиеттің орындылығы $\lambda = 0$ болғанда, 4° қасиеттен шығады.

6°. Δ анықтауыштың екі жолының (екі бағанының) сәйкес элементтері пропорционал болса, онда Δ -ның мәні нөлге тең.

Шынында да 4° қасиет бойынша пропорционалдық көбейткіштің анықтауыш белгісі алдына шығарсақ, қалған анықтауыштың екі жолының сәйкес элементтері бірдей болады. Онда 3° қасиет бойынша анықтауыш нөлге тең болды.

7°. Δ анықтауыштың k-жолының (k-бағанының) элементтері екі қосылғыштан тұрса, онда екі анықтауыштың k-жолының элементтері бірінші қосылғыштар болып (k-бағанының), ал екінші анықтауыштың k-жолының (k-бағанының) элементтері екінші қосылғыштар болады; екі анықтауышта да басқа жолдардың (басқа бағандардың) элементтері бастапқы анықтауыштың сәйкес элементтеріне тең болады. Яғни

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Бұл теңдіктің дұрыстығына, барлық анықтауыштарға (2.3) теңдікті қолданып, көз жеткізуге болады.

8°. Δ анықтауыштың кез келген жолының (бағанының) барлық элементтерін λ санына көбейтіп, оны басқа бір жолдың (бағанның) сәйкес элементтеріне қосса, онда Δ -ның мәні өзгермейді.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \lambda = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} + a_{21} & \lambda a_{12} + a_{22} & \lambda a_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бұл қасиеттің дұрыстығы 7° және 6° қасиеттерден шығады.

9°. **Анықтауыштың жол мен баған элементтері бойынша жіктелуі.** Жоғары ретті анықтауышты есептеуді жеңілдететін бір тәсіл, ол осы анықтауышты төменгі ретті анықтауыштарға жіктеу.

Басқаша айтқанда n-ретті анықтауышты (n−1)-ретті анықтауыштардың қосындысы түріне келтіру. Ол үшін алдымен жаңа ұғымдар енгізіледі.

Анықтама 1.3. n-ретті анықтауыштың a_{ij} элементінің миноры M_{ij} деп, осы анықтауыштың a_{ij} элементі тұрған i-жол мен j-бағанды алып (өшіріп) тастағанда шығатын (n–1)-ретті анықтауышты атайды.

Анықтама 1.4. n-ретті анықтауыштың a_{ij} элементінің алгебралық толықтауышысы A_{ij} деп, $(-1)^{i+j}$-ге көбейтілген a_{ij} элементінің минорын атайды, яғни

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \qquad (2.5)$$

Теорема 2.1. Δ анықтауыштың мәні осы анықтауыштың кез келген жол (баған) элементтері мен олардың сәйкес алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысына тең:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, i = \overline{1,n} \qquad (2.6)$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, j = \overline{1,n} \qquad (2.7)$$

(2.6) қосындысы (2.4) n-ретті анықтауыштың i-жолының элементтері бойынша жіктелуі, (2.7) қосынды (2.4) n-ретті анықтауыштың бағанының элементтері бойынша жіктелуі деп аталады.

Дәлелдеуі. Бұл қасиетті 3-ші ретті анықтауыштың, мысалы, 3-ші жол элементтері үшін дәлелдейік.

$$a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=a_{31}\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{32}\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+$$

$$+a_{33}\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{31}(a_{12}\cdot a_{23}-a_{13}\cdot a_{22})-a_{32}(a_{11}\cdot a_{23}-a_{13}\cdot a_{21})+a_{33}(a_{11}\cdot a_{22}-$$

$$-a_{12}\cdot a_{21})= \Delta =a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

10°. Δ анықтауыштың кейбір жолының (бағанының) элементтерін басқа жолының (бағанының) сәйкес алгебралық толықтауыштарына көбейтіп қоссақ, оның мәні нөлге тең болады.

Бұл қасиеттің дұрыстығына айтылған амалдарды орындап, анықтауыштарды ашып көз жеткізуге болады.

Мысал 1.1. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$ анықтауышты есептеу керек.

Шешуі. (2.2) формула бойынша

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4) - (-3)\cdot 5 = -8 + 15 = 7.$$

Мысал 1.2. $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ анықтауышты үшбұрыш ережесі бойынша, бірінші жол және екінші баған элементтері бойынша жіктеп есептеу керек.

Шешуі. Үшбұрыш ережесі бойынша (2.3) формуланы қолданып есептейміз:

$$\Delta = 5\cdot 1(-3) + (-2)(-4)\cdot 6 + 3\cdot 0\cdot 1 - 6\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot(-2)(-3) - 0\cdot(-4)\cdot 5 =$$
$$= -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$

Бірінші жол элементтері бойынша (2.6) формуланы қолданып есептейміз:

$$\Delta = 5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}+(-2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$= 5(-3+0) + 2(-9 +24) + 1(0 - 6) = -15 + 30 - 6 = + 9.$$

Екінші баған элементтері бойынша (2.7) формуланы қолданып есептейміз:

$$\Delta = -2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$= 2(-9+24) + 1\cdot(-15- 6) + 0 = 30 - 21 = 9.$$

§ 2. Матрицалар

2.1. Матрица ұғымы

Анықтама 2.1. m жолдан және n бағаннан тұратын кез келген a_{ij}, сандардан құралған тік төртбұрышты кесте $m \times n$ өлшемді матрица деп аталады.

Матрица $A = (a_{ij})$, $A = \|a_{ij}\|$, $i = \overline{1,m}$ (i =1;2;...;m), $j = \overline{1,n}$ (j =1;2; ...; n) немесе

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}, A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

белгілердің біреуімен белгіленеді. Мұндағы i – жол нөмірі, j – баған нөмірі, a_{ij} саны i – жол мен j – бағанның қиылысындағы элемент.

Бірдей $m \times n$ өлшемді $A = (a_{ij})$ және $B = (b_{ij})$, матрицаларының элементтері үшін $a_{ij} = b_{ij}$ болса, онда $A = B$ болады.

$m = n$ болса, онда A матрицасы n өлшемді квадрат матрица деп аталады.

A квадрат матрицаның бас диагональ $\{a_{ij}\}$ элементтерінен басқа элементтердің барлығы нөлге тең болса, оны диагональ матрица деп атайды. Дербес жағдайда $a_{ii} = 1$, $i = \overline{1,n}$ болса, оны E бірлік матрица, ал $a_{ii} = 0$, $i = \overline{1,n}$ болса, нөлдік матрица деп атайды.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix},\ 0=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}.$$

Нөлдік матрица ұғымы кез келген өлшемді матрица үшін де енгізіледі.

2.2. Матрицаларға амалдар қолдану

1. $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, матрицасының λ санына көбейтіндісі λA деп, элементтері $b_{ij}=\lambda\, a_{ij}$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, болатын $B=(b_{ij})$ матрицасын атайды.

2. Бірдей $m\times n$ өлшемді $A=(a_{ij})$ және $B=(b_{ij})$ матрицаларының қосындысы деп, элементтері $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, болатын $m\times n$ өлшемді $C=(c_{ij})$ матрицасын атайды.

$A-B=A+(-B)$, мұндағы $-B=(-1)\cdot B$.

Матрицаларды санға көбейту және матрицаларды қосу амалдары сызықтық қасиеттер деп аталып, келесі қасиеттерге ие:

а) $A+B=B+A$; (коммутативтік)
б) $A+(B+C)=(A+B)+C$; (ассоциативтік)
в) $A+0=A$;
г) $A-A=0$;
д) $1\cdot A=A$;
е) $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B$; (дистрибутивтік)
ж) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
з) $1\cdot\alpha(\beta A)=(\alpha\cdot\beta)A$;

мұндағы A, B, C - өлшемдері бірдей матрицалар, ал α,β - сандар.

3. $m\times n$ өлшемді $A=(a_{ij})$ мен $n\times p$ өлшемді $B=(b_{jk})$ матрицаларының көбейтіндісі деп, элементтері

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk} \qquad (2.8)$$

$i=\overline{1,m}$ $k=\overline{1,p}$, болатын $C=(c_{ik})$ матрицасын атайды.

Матрицаларды көбейту келесі қасиеттерге ие:

а) $A(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$; (ассоциативтік)
б) $A\cdot(B+C)=AB+AC$; (дистрибутивтік)
в) $(A+B)\cdot C=AC+BC$; (дистрибутивтік)
г) $\alpha\ (AB)=(\alpha\ A)\cdot B$

Жалпы жағдайда, $AB\neq BA$

Мысал 2.1. 2×3 өлшемді $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&3&0\\2&1&1\end{pmatrix}$ матрицалары үшін $2A+3B$ сызықтық комбинация табылсын.

Шешуі. Матрицаларды санға көбейту жәнә матрицаларды қосу ережесін қолдансақ:

$$2A+3B=2\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2&3&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&9&0\\6&3&3\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}2-6&4+9&6+0\\0+6&2+3&-4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&13&6\\6&5&-1\end{pmatrix}.$$

Мысал 2.2. $A=\begin{pmatrix}1&2\\5&-6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-4\\7&8\end{pmatrix}$ квадрат матрицалары үшін AB және BA матрицалары табылсын.

Шешуі. Матрицаларды көбейту ережесі (2.8) бойынша:

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot7 & 1\cdot(-4)+2\cdot(8)\\ 5\cdot3-6\cdot7 & 5\cdot(-4)-6\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&12\\-27&-68\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}3\cdot1-4\cdot5 & 3\cdot2-4\cdot(-6)\\ 7\cdot1-8\cdot5 & 7\cdot2+8\cdot(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17&30\\47&-34\end{pmatrix}$$

нәтижелерден көрінгендей $AB\neq BA$. Бірақ AB, BA квадрат матрицалардың анықтауыштары өзара тең және

$$\Delta_{BA}=\Delta_{AB}=\Delta_A\cdot\Delta_B$$

теңдік орындалады.

Мысал 2.2 үшін $\Delta_A=-16$, $\Delta_B=52$, $\Delta_{AB}=\Delta_{BA}=-832$.

2.3. Кері матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21}\,a_{22}\cdots a_{2n}\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ a_{n1}\,a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}=(a_{ij}),\, i=\overline{1,n}\ \ j=\overline{1,n}$$

n-ретті квадрат матрицаның анықтауышы $\Delta=\det A\neq0$ болса, A – бейерекше матрица деп, ал $\Delta=\det A=0$ болса, онда A – ерекше матрица деп аталады.

Анықтама 2.2. $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1,n}$ $j=\overline{1,n}$ квадрат матрицаның аударылған (транспонирленген) матрицасы деп, оның жолдары мен сәйкес бағандарын ауыстырғанда шығатын

$$A^T=(a_{ji})=\begin{pmatrix}a_{11}\,a_{21}\cdots a_{n1}\\ a_{12}\,a_{22}\cdots a_{n2}\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ a_{1n}\,a_{2n}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

квадрат матрицаны атайды.

Анықтама 2.3. $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$ квадрат матрицаға қосалқы матрица деп, a_{ij} элементтердің A_{ij} алгебралық толықтауыштарынан құралған

$$A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix} \qquad (*)$$

квадрат матрицаны атайды.

Қосалқы матрицаны алу үшін A матрицасының әрбір элементін оның алгебралық толықтауышымен ауыстырып, алынған матрицаны транспонирлеу керек.

Анықтама 2.4. A квадрат матрицасы үшін $A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = E$ болатын, мұнда E – бірлік матрица, A^{-1} матрицасы табылса, онда A^{-1} матрицасы A матрицасына кері матрица деп аталады.

Ескерту 2.1. A мен A^{-1} өзара кері матрицалар болып, өлшемдері бірдей болады.

Теорема 2.2. Кез келген бейерекше квадрат матрицаның кері матрицасы бар және ол мына түрде болады:

$$A^{-1} = \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{A^*}{\det A} \qquad (2.10)$$

Дәлелдеуі.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{21} & A_{22} & A_{33} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+\dots+a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\dots+a_{1n}A_{2n} & \dots & a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\dots+a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+\dots+a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\dots+a_{2n}A_{2n} & \dots & a_{21}A_{n1}+a_{22}A_{n2}+\dots+a_{2n}A_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+\dots+a_{nn}A_{1n} & a_{n1}A_{21}+a_{n2}A_{22}+\dots+a_{nn}A_{2n} & \dots & a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\dots+a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Мұнда анықтауыштардың 10° қасиеті мен (2.6), (2.7) формулаларды пайдаландық. Осылайша A^{-}! $A = E$ екендігі дәлелденеді.

Кері матрицаның қасиеттері:

1. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$.

Анықтама 2.5. Матрицаларды элементар (жай) түрлендіру деп келесі түрлендірулерді атайды:

а) матрицаның i-жолын (бағанын) $k \neq 0$ санға көбейту;

б) i-жолға (бағанға) j-жолды (бағанды) $k \neq 0$ санға көбейтіп қосу;

в) i-жолмен (бағанмен) j-жолдың (бағанның) орындарын ауыстыру.

Мысал 2.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицаның A^{-1} кері матрицасы табылсын.

Шешуі. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 5 \neq 0$ болғандықтан бұл бейерекше матрицаның кері матрицасы бар. Қосалқы A^* матрицаны табамыз: $A_{11} = 1$, $A_{21} = -3$, $A_{12} = -(-1) = 1$, $A_{22} = 2$. Демек, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Онда $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Тексеру:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} & 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 3 \cdot \frac{2}{5} \\ -1 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} & -1 \cdot \left(-\frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицаның рангі

Матрицаның рангі базистік жолдар (базистік бағандар) деп аталатын жолдар (бағандар) санын анықтайды, ал қалған жолдар (бағандар) осы базистік жолдардың (базистік бағандардың) сызықтық комбинациясы болады.

$m \times n$ өлшемді $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ матрицасын қарастырайық.

A матрицасының k-ретті миноры деп, $k \leq \min(m, n)$ осы матрицаның кез келген k жолдарымен, кез келген k бағандарының қиылысындағы элементтерінен құралған матрицаның анықтауышын атайды.

Осындай минорлардың саны $C_m^k C_n^k$ болады, мұндағы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n! = 1.2.3...n$, n элементтен k элементті терулер саны.

Анықтама 2.6. A матрицасының рангі деп, осы матрицаның нөлге тең емес минорларының ең үлкен ретін атайды.

A матрицасының рангін rang$A$, r, немесе $r(A)$ деп белгілейді.

Матрицаның рангін анықтайтын минор базистік минор деп аталады.

Матрица рангісінің қасиеттері:

1. Матрицаны аударғанда (транспонирлегенде) оның рангі өзгермейді.
2. Матрицаның нөлдік қатарын (жол, баған) өшіргенде оның рангі өзгермейді.
3. Матрицаны элементар түрлендіргенде оның рангі өзгермейді.

Мысал 2.4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ матрицаның рангі табылсын.

Шешуі. Бұл матрицада барлық 3-ретті минорлар нөлге тең. 2-ретті $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$ минор бар. Демек, берілген матрицаның рангі rang $A = 2$.

§ 3. Сызықтық теңдеулер жүйелері

3.1. n белгісізді m сызықтық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ \ldots \ldots \ldots\ \ldots \ldots\ \ldots \ldots \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.11)$$

түрінде беріледі. Мұндағы x_j– белгісіз шамалар, ал a_{ij} жүйенің коэффициенттері, b_i бос мүшелер – берілген сандар, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

Егер $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, ... $x_n = a_n$ сандары теңдеулер жүйесіндегі барлық теңдеулерді қанағаттандырса, онда $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ сандар жиынтығы (2.11) сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімі деп аталады.

(2.11) теңдеулер жүйесінің кем дегенде бір шешімі бар болса, онда ол үйлесімді жүйе, ал бірде-бір шешімі болмаса, онда ол үйлесімсіз жүйе деп аталады.

Тек бір ғана шешімі бар жүйе – анықталған жүйе, ал бірден көп шешімі бар жүйе – анықталмаған жүйе деп аталады.

Белгісіздер саны бірдей екі сызықтық жүйенің барлық шешімдерінің жиыны дәл бірдей болса, онда олар эквивалент жүйелер деп аталады.

Егер $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ болса, онда (2.11) біртекті жүйе деп аталады, ал ең болмағанда бір бос мүше нөлге тең болмаса, біртекті емес жүйе деп аталады.

(2.11) жүйесін матрицалар арқылы

$$AX = B \qquad (2.12)$$

ықшам түрде жазуға болады. Мұндағы:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix},\ X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix},\ B=\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix},$$

яғни A – белгісіздердің коэффициенттерінен құрылған $m\times n$ өлшемді матрица, X белгісіздерден құрылған $n \times 1$ өлшемді баған матрица, B – бос мүшелерден құрылған $m \times 1$ өлшемді баған матрица.

(2.11) жүйе матрицасы A ның оң жағына бос мүшелер бағанын тіркеп жазғандағы $\overline{A}$ матрица (2.11) жүйенің кеңейтілген матрицасы деп аталады, яғни

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (2.13)$$

Шешімнің бар не жоқтығын мына теорема анықтайды.

Теорема 2.3 (Кронекер-Капелли). Біртекті емес (2.11) сызықтық теңдеулер жүйесі үйлесімді болу үшін rang$A$ = rang$\overline{A}$ болуы қажетті және жеткілікті.

Қажеттілігі. (2.11) жүйе үйлесімді, ал $x_i = \alpha_i$, $i = \overline{1,n}$, сандары жүйенің шешімдері болсын. Осы мәндерді (2.11) жүйеге қойып, m тепе-теңдікті аламыз:

$$\begin{matrix} a_{11}\alpha_1 & + a_{12}\alpha_2 + \cdots & + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + & a_{22}\alpha_2 + \ \cdots & + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + & a_{m2}\alpha_2 + \ \cdots & + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{matrix} \qquad (2.14)$$

(2.14) тепе-теңдіктер бойынша кеңейтілген (2.13) түріндегі $\overline{A}$ матрицаның соңғы бағаны элементтері, сәйкес түрде α_1, α_2, ... α_n коэффициенттерімен алынған алдыңғы бағандардың қосындысына тең болады, яғни соңғы баған алдыңғы бағандардың сызықтық комбинациясы. Демек, rang$A$ = rang$\overline{A}$.

Жеткіліктілігі. rang$A$ = rang$\overline{A}$ = r = min(n, m) болсын. Онда A матрицаның базистік бағандары, $\overline{A}$ матрицаныңда базистік бағандары болып шығады. Сондықтан, $\overline{A}$ матрицаның соңғы бағаны сол базистік бағандар арқылы, жалпы алғанда, A матрицаның бағандарының жүйесі арқылы сызықтық түрде өрнектеледі. Сондықтан A матрицаның α_1, α_2, ... α_n коэффициенттерімен алынған бағандарының қосындысы, бос мүшелерден құралған бағанға тең болады, яғни (2.14) түріндегі m теңдіктер орындалады. Демек, (α_1, α_2, ... α_n) сандар жиынтығы (2.11) жүйенің шешімі болады, яғни (2.11) жүйе үйлесімді.

3.2. Сызықтық теңдеулер жүйесін шешудің матрицалық әдісі

Егер A – n-ретті квадрат матрица болып, ($m = n$), Δ = det$A \neq 0$ болса, A^{-1} кері матрицаны пайдаланып, (2.11) жүйенің шешімін табуға болады.

Теорема 2.4. Егер A бейерекше квадрат матрица болса, яғни Δ = det$A \neq 0$, онда (2.12) $AX = B$ жүйенің

$$X = A^{-1}B \qquad (2.15)$$

формуламен табылатын жалғыз шешімі бар.

Дәлелдеуі. $AX = B$ теңдіктің екі бөлігін сол жақтарынан A^{-1} ге көбейтсек:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Мысал 3.1. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$ жүйені матрицалық әдіспен шешу керек.

Шешуі. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ екендігін ескеріп, $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = +(1+2) = +3 \neq 0$ болғандықтан, A^{-1} кері матрица бар.

A матрицасының алгебралық толықтауыштары: $A_{11} = 1$, $A_{12} = -2$, $A_{21} = (-1) = 1$, $A_{22} = 1$ болғандықтан, (*) теңдік бойынша қосалқы матрица $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, болады. Онда кері матрица (2.10) формула бойынша:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(2.15) формула бойынша теңдеулер жүйесінің шешімі:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot 7 \\ -\frac{2}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Демек, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

3.3. Крамер әдісі

n белгісізді n сызықтық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.16}$$

түрінде берілсе, оның матрицалық түрі $AX = B$ болады да, $\Delta = \det A \neq 0$ болғанда, оның шешімі $X = A^{-1}B$.

(2.15) бойынша формуланы тарқатып жазсақ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Осыдан келесі теңдіктер шығады:

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$
$$x_2 = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta}, \tag{2.17}$$
$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\ldots \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & b_n \end{vmatrix}. \tag{2.18}$$

Бұл теңдіктердің оң бөлігіндегі бөлшектердің алымдары, сәйкес түрде бос мүшелерден құралған бағандардың элементтері бойынша жіктелулері. Сондықтан (2.17) теңдіктер былайша жазылады:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{2.19}$$

Бұл формулалар Крамер формулалары деп аталады.

Мысал 3.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6 \end{cases}$ жүйені Крамер формулаларын қолданып шешу керек.

Шешуі. Жүйенің анықтауышы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 84 + 96 - 105 - 48 - 0 = 27 \neq 0.$$

Демек, берілген жүйенің жалғыз шешімі бар. (2.18) бойынша. Δ_1, Δ_2, Δ_3 анықтауыштарды, бос мүшелерден құрылған бағанмен Δ-дағы, сәйкес түрде, бірінші бағанды, екінші бағанды, үшінші бағанды алмастырып табамыз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot (-48) - 2 \cdot 36 + 3 \cdot 102 = -288 - 72 + 306 = -54.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&6&3\\4&9&6\\7&-6&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}9&6\\-6&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot2\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot3\cdot\begin{vmatrix}4&9\\7&-6\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot36-6\cdot(-42)+3\cdot(-87)=288-261=27.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&6\\4&5&9\\7&8&-6\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}5&9\\8&-6\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot2\cdot\begin{vmatrix}4&9\\7&-6\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot6\cdot\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-102)-2\cdot(-87)+6\cdot(-3)=-102+174-18=54.$$

Мұнда Δ_1, Δ_2, Δ_3 анықтауыштарды есептегенде, бірінші жол элементтері бойынша, жіктедік. Енді (2.19) Крамер формулалары бойынша шешімдерді табамыз:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-54}{27}=-2;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{27}{27}=1;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{54}{27}=2.$$

Демек, жүйенің шешімдері: $x_1=-2$; $x_2=1$; $x_3=2$.

3.4. Гаусс әдісі

Бұл әдіс белгісіздерді біртіндеп арылтуға негізделген.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=b_n\end{cases}\qquad(2.11)$$

n белгісізді m сызықтық теңдеулер жүйесін қарастырайық.

Гаусс әдісін қолдану екі кезеңнен тұрады. Бірінші кезеңде (тура бағыт) (2.11) жүйе түрлендіру арқылы сатылы түрге (дербес жағдайда үшбұрышты) келтіріледі.

Екінші кезеңде (кері жол) пайда болған соңғы теңдеудегі бірінші белгісіз басқалары (еркін белгісіздер) арқылы өрнектеліп, біртіндеп кері қайтып, қалған белгісіздер де еркін белгісіздер арқылы өрнектеледі.

Бірінші кезең. $a_{11}\neq0$ деп есептейміз (егер $a_{11}=0$ болса, жүйеде x_1-дің алдындағы коэффициент нөлге тең емес теңдеуді жазамыз).

1-қадам. (2.11) жүйенің бірінші теңдеуінің екі бөлігін: $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$-ге көбейтіп, екінші теңдеуге қосамыз; $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$-ге көбейтіп, үшінші теңдеуге қосамыз; осылайша жалғастырып, $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$-ге көбейтіп, соңғы теңдеуге қосамыз. Нәтижесінде, бірінші теңдеуден басқа барлық теңдеулерде x_1 белгісізін жойып, келесі жүйе алынады.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \quad a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)}\\ \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\ \quad a_{m2}^{(1)}x_2+a_{m3}^{(1)}x_3+\cdots+a_{mn}^{(1)}x_n=b_m^{(1)}\end{cases}\qquad(2.11_1)$$

Демек, 1-теңдеуден басқа теңдеулерден x_1 шығарылып тасталды. $a_{ij}^{(1)}, b_i^{(1)}\left(i=\overline{2,m}, j=\overline{2,n}\right)$– жаңа коэффициенттер.

2-қадам. Анықтық үшін $a_{22}^{(1)}\neq0$ деп (2.11_1) жүйенің екінші теңдеуінің екі бөлігін: $-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$-ге көбейтіп, 3-теңдеуге қосамыз; $-\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$-ге көбейтіп, 4-теңдеуге қосамыз; т.с.с. $-\frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$-ге көбейтіп, соңғы теңдеуге қосамыз. Нәтижесінде, келесі жүйе алынады:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \quad a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)}\\ \quad\quad a_{33}^{(2)}x_3+\cdots+a_{3n}^{(2)}x_n=b_3^{(2)}\\ \quad\quad \ldots\ \ldots\\ \quad\quad a_{m3}^{(2)}x_3+\cdots+a_{mn}^{(2)}x_n=b_m^{(2)}\end{cases}\qquad(2.11_2)$$

Демек, бірінші және екінші теңдеулерден басқа теңдеулерден x_2 шығарылып тасталды. $a_{ij}^{(2)}, b_i^{(2)}\left(i=\overline{3,m}, j=\overline{3,n}\right)$ - жаңа коэффициенттер. Осылайша түрлендіруді мүмкіндігінше жалғастыра береміз. Ең соңында сатылы жүйе шығады.

Сатылы жүйеге келтіру процессінде:

а) 0 = 0 теңдік шықса, ол теңдік шығарып тасталады;

ә) $0=b, b\neq0$ теңдік шықса, онда берілген жүйе үйлесімсіз болады.

Соңғы сатылы жүйенің соңғы теңдеуінде бір белгісіз қалса, онда (2.11) жүйе жалғыз шешімге ие болады:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n&=b_2^{(1)}\\ a_{33}^{(2)}x_3+\cdots+a_{3n}^{(2)}x_n&=b_3^{(2)}\\ \ldots\ \ldots\ \ldots&\\ a_{mn}^{(m-1)}x_n&=b_m^{(m-1)}\end{aligned}\qquad(2.11_{m-1})$$

Екінші кезең: Гаусс әдісінің кері бағыты. Сатылы жүйе жалпы алғанда, ақырсыз көп шешімге ие. Жүйенің соңғы теңдеуінде бірінші белгісіз x_k ны басқа белгісіздер (x_{k+1}, x_{k+2}, ... , x_n) арқылы өрнектейміз. Содан соң x_{k-1}-ді, x_{k-2} ні, ... x_1 ді табамыз. (x_{k+1}, x_{k+2}, ... , x_n), еркін белгісіздерге әртүрлі мәндер беріп – (2.11) жүйенің шексіз көп шешімін аламыз.

Ескерту 4.1. Егер сатылы үшбұрышты болса, яғни $k = n$, онда (2.14) жүйе жалғыз шешімге ие болады. Соңғы теңдеуден x_n ді табамыз, одан алдыңғы теңдеуден x_{n-1} ді, т.с.с. $x_{n-2}, x_{n-3}, ..., x_2, x_1$ лерді табамыз.

Ескерту 4.2. Іс жүзінде (2.11) жүйені шешу үшін, оның кеңейтілген матрицасын элементар түрлендірген тиімді. $a_{11} = 1$ болғандығы есептеулер үшін ыңғайлы.

Мысал 3.3. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+13x_3=0, \\ 3x_1+14x_2+12x_3=18, \\ 5x_1+25x_2+16x_3=39 \end{cases}$ сызықтық теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешу керек.

Шешуі. Жүйені төмендегіше түрлендіреміз:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2+13x_3=0, \\ 3x_1+14x_2+12x_3=18, \\ 5x_1+25x_2+16x_3=39 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x_1+7x_2+13x_3=0, \\ \frac{7}{2}x_2-\frac{15}{2}x_3=18, \\ \frac{15}{2}x_2-\frac{33}{2}x_3=39 \end{cases} \left(-\frac{15}{7}\right) \sim \begin{cases} 2x_1+7x_2+13x_3=0, \\ \frac{7}{2}x_2-\frac{15}{2}x_3=18, \\ -\frac{3}{7}x_3=\frac{3}{7} \end{cases}$$

Бұл үшбұрышты сатылы жүйе. Гаусс әдісінің кері бағытын қолдансақ:

$$x_3=-1;\ x_2=\left(18+\frac{15}{2}x_3\right):\left(18+\frac{15}{2}(-1)\right):\frac{7}{2}=-\frac{21}{2}\cdot\frac{2}{7}=-3;$$

$$x_1=(-7x_2-13x_3):2=(-7\cdot(-3)-13\cdot(-1)):2=(21+13):2=17.$$

Демек, берілген жүйенің шешімі: $x_1 = 17, x_2 = -3, x_3 = -1$.

Мысал 3.4. $\begin{cases} 2x_1+5x_2-4x_3=8, \\ 3x_1+15x_2-9x_3=5, \\ 5x_1+5x_2-7x_3=27 \end{cases}$ сызықтық теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешу керек.

Шешуі. Гаусс әдісін қолданып, келесі түрлендірулер жасаймыз:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)\ \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2-4x_3=8, \\ 3x_1+15x_2-9x_3=5, \\ 5x_1+5x_2-7x_3=27 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x_1+5x_2-4x_3=8, \\ \frac{15}{2}x_2-3x_3=-7, \\ -\frac{15}{2}x_2+3x_3=-7 \end{cases} (1) \sim \begin{cases} 2x_1+5x_2-4x_3=0, \\ \frac{15}{2}x_2-3x_3=-7, \\ 0=0 \end{cases}$$

2-қадамнан кейін екі теңдеу қалды, себебі үшінші теңдеу 0 = 0 түріне келіп, жүйеден шығарылды. Осымен Гаусс әдісінің тура бағыты аяқталды.

Енді кері бағытқа көшеміз. Екінші теңдеуден $x_2 = \frac{2}{5}x_3 - \frac{14}{5}$. Бірінші теңдеудегі x_2-нің орнына осы өрнекті қойсақ $2x_1 - 2x_3 = \frac{38}{3}$ болады. Онда, жалпы шешім:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + \frac{19}{3}, \\ x_2 = \frac{2}{5}x_3 - \frac{14}{15}. \end{cases}$$

Мұндағы x_1, x_2 лер базистық белгісіздер, ал x_3 – еркін белгісіз.

Дербес шешімдер: $x_3 = 0$ болғанда, $x_1 = \frac{19}{3}$, $x_2 = \frac{14}{15}$; $x_3 = 1$ болғанда $x_1 = \frac{22}{3}$, $x_2 = -\frac{8}{13}$, т.с.с.

Мысал 3.5. $\begin{cases} 2x_1+5x_2-4x_3=8, \\ 3x_1+15x_2-9x_3=5, \\ 5x_1+5x_2-7x_3=1 \end{cases}$ жүйені шешу керек.

Шешуі. Гаусс әдісінің тура бағыты бойынша түрлендіреміз:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)\ \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2-4x_3=8, \\ 3x_1+15x_2-9x_3=5, \\ 5x_1+5x_2-7x_3=1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x_1+5x_2-4x_3=8, \\ \frac{15}{2}x_2-3x_3=-7, \\ -\frac{15}{2}x_2+3x_3=-19 \end{cases} (1) \sim \begin{cases} 2x_1+5x_2-4x_3=8, \\ \frac{15}{2}x_2-3x_3=-7, \\ 0=26 \end{cases}$$

Үшінші $0 = 26$ теңдіктің болуы мүмкін емес, сондықтан берілген жүйе үйлесімсіз, яғни жүйенің шешімі жоқ.

§ 4. Біртекті сызықтық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2.20)$$

біртекті сызықтық теңдеулер жүйесі берілсін. Бұл жүйе үйлесімді, rang$A$ = rang $\overline{A}$, себебі нөлдік шешім бар: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Қандай шарттар орындалғанда, (2.20) жүйенің нөлге тең емес шешімдері бар?

Теорема 2.5. Біртекті сызықтық теңдеулер жүйесі (2.20) нөлдік емес шешімге ие болуы үшін $r = \text{rang}A < n$ болуы қажетті және жеткілікті.

Қажеттілігі. Матрицаның рангі оның өлшемінен үлкен бола алмайды, яғни $r \le n$. $r = n$ болса, онда $n \times n$ өлшемді минорлардың біреуі нөлге тең болмайды. Сондықтан, сәйкес сызықтық теңдеулер жүйесі жалғыз шешімге ие: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0$, $\Delta_i = 0$, $\Delta \ne 0$. Демек, басқа шешімдер жоқ. Яғни нөлдік емес шешім бар болса, $r < n$.

Жеткіліктілігі. $r < n$ болсын. Онда біртекті жүйе үйлесімді болғандықтан анықталмаған болады. Яғни жүйе ақырсыз көп шешімге ие болады. Демек, нөлдік емес шешімге де ие болады.

Теорема 2.6. $m = n$ болғанда (2.20) біртекті жүйе нөлдік емес шешімге ие болуы үшін $\Delta = \det A = 0$ болуы, қажетті және жеткілікті.

Қажеттілігі. $m = n$ болғанда (2.20) жүйе нөлдік емес шешімге ие болса, онда $\Delta = 0$ болады. Себебі $\Delta \ne 0$ болғанда, жүйе нөлдік шешімге ие болады.

Жеткіліктілігі. Егер $\Delta = 0$ болса, онда rang$A = r < n$ болады. Демек, жүйе ақырсыз көп шешімге ие болады.

Мысал 4.1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + \ldots + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$ біртекті жүйенің жалпы және іргелі шешімдерін табу керек.

Шешуі. Берілген төрт теңдеу, бес белгісізден құралған жүйенің матрицасының рангін табайық:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2)\ (-3)\ (-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2)\quad (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Демек, rang$A$ = rang$\overline{A}$ = 2. Сондықтан берілген жүйе келесі жүйемен мәндес болады:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Мысалы, x_1 мен x_3 белгісіздерді x_2, x_4, x_5 еркін белгісіздер арқылы өрнектейік:

$$\begin{cases} x_3 = x_4 + 3x_5 \\ x_1 = -\dfrac{2x_2 + 4x_4 + 8x_5}{3} \end{cases}$$

Жүйенің дербес (іргелі) шешімдерін табу үшін x_2, x_4, x_5 еркін белгісіздерге әртүрлі мәндер береміз:

а) $x_2 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$: $x_3 = 0, x_1 = -\frac{2}{3}$;

б) $x_2 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$: $x_3 = 1, x_1 = -\frac{4}{3}$;

в) $x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$: $x_3 = 3, x_1 = -\frac{8}{3}$.

Демек, $(-\frac{2}{3}, 1, 0, 0, 0)$, $(-\frac{4}{3}; 0; 1; 1; 0)$, $(-\frac{8}{3}; 0; 3; 0; 1)$ сандар жиындары берілген жүйенің дербес іргелі шешімдері болады.

Мысал 4.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ жүйенің жалпы және дербес (іргелі) шешімдерін табу керек.

Шешуі. Берілген жүйенің матрицасының рангін табайық:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 + 18 + 3 - 9 - 8 = 0.$$

Демек, квадрат матрицаның анықтауышы нөлге тең болғандықтан, бұл біртекті жүйенің нөлдік емес шешімдері бар. Алдымен матрицаның рангін табайық:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&3\\3&3&2\end{pmatrix}\begin{matrix}(-2)\,(-3)\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&5\\0&-3&5\end{pmatrix}(-1)\sim\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&5\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&5\end{pmatrix}.$$

Демек, rang = 2. Сондықтан берілген жүйе мына жүйемен мәндес болады:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0,\\-3x_2+5x_3=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0,\\-3x_2+5x_3=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3-2x_2\\x_2=\dfrac{5}{3}x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{7}{3}x_3\\x_2=\dfrac{5}{3}x_3.\end{cases}$$

x_3-ті еркін тәуелсіз деп алып, әртүрлі мәндер беріп, сәйкес дербес (іргелі) шешімдерді табамыз. $x_3=c$ десек, $(-\frac{7}{3}c,\ \frac{5}{3}c,\ c)$ жалпы шешім болады. Іргелі шешімдер: $c=1$ болғанда: $(-\frac{7}{3};\ \frac{5}{3};\ 1)$; $c=3$ болғанда $(-7;-5;3)$.